Análise combinatória

Prof. José Carlos da Fonseca

1. Introdução

Analise a seguinte situação problemas: *De quantas maneiras diferentes Vitória pode se vestir se ela tem 2 saias, uma vermelha e outra roxa, e 3 blusas, uma amarela, uma verde e a terceira azul?*

Problemas como esse envolvem o cálculo de agrupamentos que podem ser feitos com os elementos de um ou mais conjuntos. Análise combinatória é um estudo realizado na matemática e na lógica, responsável pela análise das possibilidades e das combinações. No caso deste problema bastamos aplicar o princípio fundamental da contagem, que estudaremos em seguida.

2. Princípio Fundamental da contagem

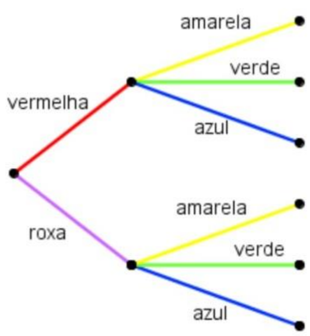
O **princípio fundamental da contagem (PFC)** é um princípio combinatório que indica de quantas formas se pode escolher um elemento de cada um de *n* conjuntos finitos. Se o primeiro conjunto tem A1 elementos, o segundo tem A2 elementos, e assim sucessivamente, então o número total T de escolhas é dado por: $T = A1 . A2 . A3 . ... A_n$

Retornemos ao exemplo da introdução:

De quantas maneiras diferentes Vitória pode se vestir se ela tem 2 saias, uma vermelha e outra roxa, e 3 blusas, uma amarela, uma verde e a terceira azul?

R: Por exemplo, Mariana pode se vestir com uma saia vermelha e uma blusa verde, ou então com uma saia roxa e uma blusa verde. Se observarmos atentamente a tabela ou a árvore de diagrama abaixo verificamos que existe 6 maneiras de Mariana se vestir.

saia	blusa
vermelha	amarela
	verde
	azul
roxa	amarela
	verde
	azul



Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 em outra. Aplicando o PFC 2.6 = 12 possibilidades.

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na primeira etapa **m** e para cada possibilidade da primeira etapa o número de possibilidades na segunda etapa é **n**, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto **m. n**

Exercícios

1) De quantas maneiras diferentes pode-se vestir uma pessoa que tenha 5 camisas, 3 calças, 2 pares de meia e 2 pares de sapato?
2) Existem 2 vias de locomoção de uma cidade A para uma cidade B e 3 vias de locomoção da cidade B a uma cidade C. De quantas maneiras pode-se ir de A a C, passando por B?
3) Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado?
4) Numa lanchonete há 5 tipos de sanduíche, 4 tipos de refrigerante e 3 tipos de sorvete. De quantas maneiras podemos tomar uma lanche composto de 1 sanduiche, 1 refrigerante e 1 sorvete?
5) Quantos números de dois algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das dezenas corresponde a um múltiplo de 2 (diferente de zero) e o algarismo das unidades corresponde a um múltiplo de 3?
6) Usando somente os algarismos 1,2,3,4,5 e 6:
   a) Quantos números de 2 algarismos podemos formar?
   b) Quantos números pares de 2 algarismos podemos formar?
   c) Quantos números ímpares de 2 algarismos distintos podemos formar?
   d) Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar?
   e) Quantos números de 2 algarismos pares podemos formar?

3. Permutações simples e fatorial de um número

3.1. Fatorial

Fatorial de um número consiste em um importante processo em situações que envolvem ***Análise Combinatória***, pois a multiplicação de números naturais consecutivos é muito utilizada nos processos de contagem. Fatorial de um número consiste em multiplicar o número por todos os seus antecessores até o número 1.

Definição:

Representamos o fatorial de um número por n! e o desenvolvimento por n! = n * (n – 1) * (n – 2) * (n – 3) * ... * 4 * 3 * 2 * 1 para n ≥ 2. Caso n = 1, temos 1! = 1 e n = 0, temos 0! =

Exemplos:

a) 0! = 1
b) 1! = 1
c) 2! = 2.1=2
d) 3! = 3.2.1=6
e) 4! = 4.3.2.1=24
f) 5! = 5.4.3.2.1=120

g) n!= (n-1) .(n-2). (n-3)

h) (n+2)!= (n+2) . (n+1). n. (n-1). (n-2)!

i) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n\,(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$=n(n-1)=$n^2 - n$

Exercícios

1. **Calcule o valor ou simplifique:**
   a) 6!
   b) $\frac{7!}{4!}$
   c) $\frac{3!5!}{4!6!}$
   d) $\frac{n!}{(n-2)!}$
   e) $\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$
   f) $\frac{(n+3)!}{(n-2)!}\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

2) Quantas palavras (com significado ou não) de 3 letras podemos formar com as letras A, L e I? Quais são essas palavras?

3) Quantos números de 4 algarismos podemos escrever com os algarismos 2, 4 e 8? E de 4 algarismos distintos?

4) De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?

5)De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares, ficando duas delas (por exemplo, pai e mãe) sempre juntas, em qualquer ordem?

6) Quantos são os anagramas da palavra amor?

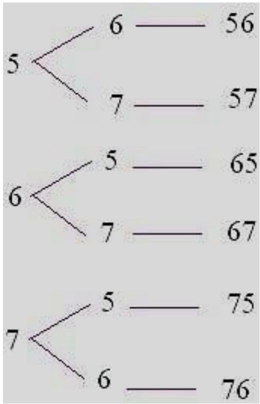
7) Quantos números naturais de algarismos distintos entre 5 000 e 10 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4 e 6?

8) (Unitau-SP) Sendo n≠0, pois o (os) valores de n tal que $\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!} = 7n$ e´ (são):

a) 7   b) 0 e 7 c) 0 e 10 d)1 e)0e 2

4. Arranjos simples

Na unidade anterior aprendemos que permutação simples de n elementos é qualquer agrupamento ordenado desses n elementos. Agora, tendo n elementos, vamos estudar os agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos,..., de k elementos, como k≤n. Observamos o exemplo: Dado o conjunto B = {5,6,7}, veja os possíveis agrupamentos formados com 2 elementos de B.



Então, os agrupamentos formados com 2 elementos do conjunto b são: 56,57,65,67,75,76. Esse agrupamento é formado por arranjos simples pelos elementos do conjunto B

Nesse exemplo percebemos que é possível formar 6 arranjos, essa quantidade pode ser representada da seguinte forma: A3,2 (três elementos distintos formados de dois a dois). Utilizando o processo do princípio fundamental da contagem, calculamos a quantidade de elementos:

$A_{3,2} = 3 . 2 . 1 = 6$

3.2 A fórmula geral utilizada no cálculo da quantidade de arranjos simples é:

$$\boldsymbol{A}_{n,p=\frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemplo:

$$\boldsymbol{A}_{5,2=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=\frac{5.4.3!}{3!}=5.4=20}$$

Exercícios

1) Calcule:

a) $A_{4,2}$

b) $A_{6,3}$

c) $A_{8,2}$

d) $A_{4,4}$

e) $A_{5,1}$

f) $A_{7,0}$

g) $A_{8,5}$

h) $A_{n,0}$

2) Determine a expressão correspondente a

a) $A_{x,2}$

b) $A_{x-3,2}$
c) $A_{2x+1,3}$

3)Determine o valor de x nas equações:

a) $A_{x-1,2=}30$

a) $A_{x,3=}x^3 - 40$

4) Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretora?

5) Responda às questões:
a) quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados pelos dígitos 4,5,6,7 e 8?
b) quantos desses números formados são ímpares?

6)De quantas maneiras podemos escolher um pivô e um ala num grupo de 12 jogadores de basquete?

7) Considere os algarismos 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9.
a) Quantos números de três algarismos distintos podemos escrever?
b) Quantos números de quatro algarismos distintos que terminem com 7 podemos escrever?
c) Quantos números de sete algarismos distintos que iniciem com 3 e terminem com 8 podemos escrever?
d) Quantos números de sete algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 5 e 6 sempre juntos e nessa ordem?

8) Num sofá há lugares para 4 pessoas. De quantas maneiras diferentes podem se sentar 6 pessoas?

9) Um estudante tem 6 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras ele poderá pintar os estados da região Sudeste do Brasil (São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Espírito Santo), cada um de uma cor?

10) Responda:
a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FILHO?
b) quantas “palavras” de 4 letras distintas é possível formar com as letras da palavra FILHO?
C) Quantas dessas “palavras” de 4 letras começam com O?
d) Quantas dessas “palavras” de 4 letras terminam com FI?
e) Quantas dessas “palavras” contêm a letra I?

11) Com os algarismos 1,2,3,4,5,e 6:
a) Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar?
b) Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar tal que o último algarismo seja sempre 6?

c) Quantos números pares de 4 algarismos distintos podemos formar?
d) Quantos números ímpares de 4 algarismos distintos podemos formar?

12) De quantas maneiras diferentes podemos dispor uma equipe de 4 alunos numa sala de aula que tem 30 carteiras?

13) Dispomos de 5 cores e queremos pintar uma faixa decorativa com 3 listras, cada uma de uma cor. De quantas maneiras isso pode ser feito?

5. Combinações Simples

vejamos duas situações:
1. Quatro carros A,B,C e D disputam uma corrida na qual serão premiados os três primeiros colocados, de acordo com a sua posição. De quantos modos poderá acontecer essa premiação?
2. Em uma sala há quatro pessoas A,B,C e D , devemos escolher 3 entre essas quatro pessoas para participarem de uma comissão. De quantos modos poderemos escolher essas 3 pessoas?

Note que no problema 1 devemos levar em consideração a ordem de chegada dos carros, assim o grupo (A,B,C) não é igual ao grupo (A,C,B). neste caso devemos utilizar a fórmula do Arranjo Simples como já estudamos.

$$\boldsymbol{A}_{4,3}=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4!}{1!}=4.3.2.1=24$$

Resposta: 24 modos

Note também que, no problema 2 a ordem dos elementos do grupo escolhido não importa, más sim os elementos do grupo. Trata-se, portanto, de um problema de Combinação Simples.

$$\boldsymbol{C}_{4,3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}=\frac{4!}{3!1!}=\frac{4.3!}{3!}=4$$

Resposta: 4 modos

5.1. A fórmula geral utilizada para combinações simples é:

$$\boldsymbol{C}_{n,p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercícios

1. Calcule o valor de:

a) $C_{6,4}$ = b) $C_{5,3}$= c) $C_{4,1}$= d) $C_{5,4}$= e) C_7^5 f) $\binom{7}{6}$

2. Quantas equipes de 3 astronautas podem ser formadas com 20 astronautas?

3. Quantas equipes diferentes de vôlei podemos escalar tendo à disposição 10 meninas que jogam em qualquer posição?

4. Quantas diagonais tem o decágono? E o icoságono?

5. Numa prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 8. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher essas 8 questões?

6. Uma associação tem uma diretoria formada por 10 pessoas: 6 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras podemos formar uma comissão dessa diretoria que tenha 3 homens e 2 mulheres?

7. Uma urna contém 5 bolas azuis e 4 bolas vermelhas. De quantas maneiras podemos selecionar:

a) 3 bolas?

b) 3 bolas azuis e 2 vermelhas?

c) 3 bolas vermelhas e 2 azuis?

8. quantas comissões de 5 elementos podemos formar com os 30 alunos de uma classe?

9. De quantas maneiras podemos extrair 4 cartas de um baralho de 52 cartas?

6. Permutações com repetição

Exemplo: Quantos anagramas tem a palavra BATATA?

Se os As fossem diferentes e os Ts também teríamos as letras B, A1,A2, A3, T1, T2, e o total de anagramas seria P6=6!

Mas as permutações entre os 3 As não produzirão novo anagrama. Então precisamos dividir P6 por P3. O mesmo ocorre com os dois Ts: precisamos dividir também por P2. Portanto, o número de anagramas da palavra BATATA é:

$\frac{P_6}{P_3 P_{2.}}=\frac{6!}{3!2!}=\frac{6.5.4.3.2.1}{3!2!}=60$

Exercícios

1. Determine quantos são os anagramas da palavra:
a) MISSISSIPI
b) PIRACICABA
c) MOSSORÓ
d) PIRACICABA que começam e terminam com A.

Problemas

Exercícios retirados do site: professorwaltertadeu.mat.br

1. (UERJ) Na ilustração abaixo, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.

Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:

O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:

(A) 624 (B) 676 (C) 715 (D) 720

2. (FUVEST) Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem. Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todas se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

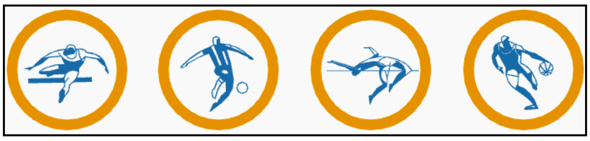
3. As antigas placas para automóveis, com duas letras seguidas de quatro algarismos, foram substituídas por novas com três letras seguidas de quatro algarismos. Nestas placas, bem como nas antigas, são utilizadas as 23 letras do alfabeto português, mais as letras K, W, Y. Quantos carros a mais puderam ser emplacados com o novo sistema?
a) 17576.10^4 b) 17576.10^5 c) 676.10^5 d) 676.10^4 e) 169.10^6

4. (FGV) Deseja-se criar uma senha para os usuários de um sistema, começando por três letras escolhidas entre as cinco A, B, C, D e E seguidas de quatro algarismos escolhidos entre 0, 2, 4, 6 e 8. Se entre as letras puder haver repetição, mas se os algarismos forem todos distintos, o número total de senhas possíveis é:

a) 78125 b) 7200 c) 15000 d) 6420 e) 50

5. (UERJ) Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual 2007. Um desses grupos está apresentado a seguir.

Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente. Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:



(A) 24 (B) 35 (C) 70 (D) 140

6. (UERJ) Considere como um único conjunto as 8 crianças – 4 meninos e 4 meninas – personagens da tirinha. A partir desse conjunto, podem-se formar ***n*** grupos, não vazios, que apresentam um número igual de Meninos e de meninas. O maior valor de *n* é equivalente a:

O Globo, 18/03/2009

(A) 45 (B) 56

(C) 69 (D) 81

7. (UERJ) A tabela apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano. Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a **n** e no país Y igual a **p**. A razão corresponde $\frac{n}{p}$ a:

País	Descrição do critério	Exemplo de placa
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem.	M3MK09
Y	Um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem.	YBW0299

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6

8. (UERJ) As tabelas abaixo mostram os palpites de três comentaristas esportivos sobre os resultados de cinco diferentes times de futebol, em cinco partidas a serem realizadas.

Comentarista A

Time	Empate	Vitória	Derrota
1			x
2			x
3	x		
4			x
5		x	

Comentarista B

Time	Empate	Vitória	Derrota
1			x
2			x
3		x	
4	x		
5		x	

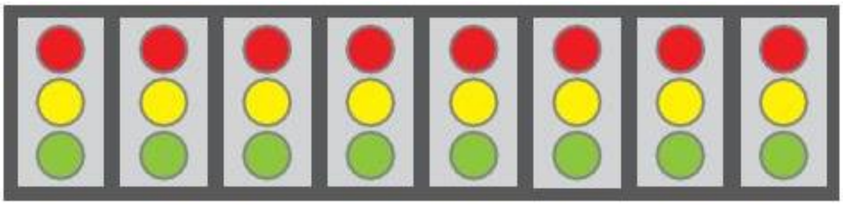
Comentarista C

Time	Empate	Vitória	Derrota
1	x		
2		x	
3		x	
4			x
5		x	

O resultado de cada time foi acertado por pelo menos dois comentaristas. Se NA, NB e NC são os números de palpites certos dos comentaristas A, B e C, a relação entre eles pode ser expressa por:

(A) NA > NB > NC (B) NA > NB = NC (C) NA = NB > NC (D) NA = NB = NC

9. Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes − vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



Considere as seguintes informações:

• cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;

• qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;

• duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

(A) 4800 (B) 1580 (C) 2400 (D) 1680

10. Os pontos A, B, C e D pertencem à reta r, e os pontos E, F e G pertencem à reta s, sendo **r//s**. Quantos triângulos podemos formar com esses vértices?

(A) 20 (B) 30 (C) 40 (D) 50