1. PROBABILIDADE

O estudo da **probabilidade** vem da necessidade de em certas situações, prevermos a possibilidade de ocorrência de determinados fatos.

Para iniciarmos o estudo da probabilidade, vamos a seguir definir alguns conceitos importantes sobre a matéria.

1.1. Experimento Aleatório

Se lançarmos uma moeda ao chão para observarmos a face que ficou para cima, o resultado é imprevisível, pois tanto pode dar **cara**, quanto pode resultar em **coroa**.

Se ao invés de uma moeda, o objeto a ser lançado for um dado, o resultado será mais imprevisível ainda, pois aumentamos o número de possibilidades de resultado.

Em eventos como estes, ocorrendo nas mesmas condições ou em condições semelhantes, que podem apresentar resultados diferentes a cada ocorrência, damos o nome de **experimentos aleatórios**.

1.2. Espaço Amostral

Ao lançarmos uma moeda não sabemos qual será a face que ficará para cima, no entanto podemos afirmar com toda certeza que ou será **cara**, ou será **coroa**, pois uma moeda só possui estas duas faces. Neste exemplo, ao conjunto **{cara, coroa}** damos o nome de **espaço amostral**, pois ele é o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer neste experimento.

Representamos um **espaço amostral**, ou **espaço amostral universal** como também é chamado, pela letra **S**. No caso da moeda representamos o seu **espaço amostral** por:

S = { cara, coroa }

Se novamente ao invés de uma moeda, o objeto a ser lançado for um dado, o **espaço amostral** será:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

1.3. Evento

Quando lançamos um dado ou uma moeda, chamamos a ocorrência deste fato de **evento**. Qualquer subconjunto de um espaço amostral é um evento. Em relação ao **espaço amostral** do lançamento de um dado, veja o conjunto a seguir:

A = { 2, 3, 5 }

Note que $A \subset S$ (A está contido em S, A é um subconjunto de S). O conjunto **A** é a representação do evento do lançamento de um dado, quando temos a face para cima igual a um número primo.

1.3.1. Classificação de Eventos

Podemos classificar os eventos por vários tipos. Vejamos alguns deles:

1.3.2. Evento Simples

Classificamos assim os eventos que são formados por um único elemento do espaço amostral. **A = { 5 }** é a representação de um **evento simples** do lançamento de um dado cuja face para cima é divisível por **5**. Nenhuma das outras possibilidades são **divisíveis por 5**.

1.3.3. Evento Certo

Ao lançarmos um dado é certo que a face que ficará para cima, terá um **número divisor** de **720**.

Este é um **evento certo**, pois **720 = 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1**, obviamente qualquer um dos números da face de um dado é um divisor de **720**, pois **720** é o produto de todos eles.

1.3.4. Evento Impossível

No lançamento conjunto de dois dados qual é a possibilidade de a soma dos números contidos nas duas faces para cima, ser igual a **15**?

Este é um **evento impossível**, pois o valor máximo que podemos obter é igual a doze. Podemos representá-lo por **A = {}** ou A={∅}.

1.3.5. Evento União

Seja **A = {1, 3}** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, ímpar e menor ou igual a **3** e **B = { 3, 5 }**, o evento de ocorrência da face superior, ímpar e maior ou igual a **3**, então **C = { 1, 3, 5 }**representa o evento de ocorrência da face superior ímpar, que é a união dos conjuntos **A** e **B**, ou seja, AUB. Note que o evento **C** contém todos os elementos de **A** e **B**.

1.3.6. Evento Intersecção

Seja **A = { 2, 4 }** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, par e menor ou igual a **4** e **B = { 4, 6 }**, o evento de ocorrência da face superior, par e maior ou igual a **4**, então **C = { 4 }** representa o evento de ocorrência da face superior par, que é a intersecção dos conjuntos **A** e **B**, ou seja, A∩B.

Veja que o evento **C** contém apenas os elementos comuns a **A** e **B**.

1.3.7. Eventos Mutuamente exclusivos

Seja **A = { 1, 2, 3, 6 }** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, um número divisor de**6** e **B = { 5 }**, o evento de ocorrência da face superior, um divisor de **5**, os eventos **A** e **B** são **mutuamente exclusivos**, pois A∩B=∅, isto é, os eventos não possuem elementos em comum.

1.3.8. Evento Complementar

Seja **A = { 1, 3, 5 }** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, um número ímpar, o seu **evento complementar** é $\overline{A}$ **= { 2, 4, 6 }** o evento de ocorrência da face superior no lançamento de um dado, um número par.

Os elementos de **A** são todos os elementos do espaço amostral **S** que não estão contidos em **A**, então temos que $\overline{A}$ **= S - A** e ainda que **S = A +** $\overline{A}$.

1.4. Probabilidade de Ocorrência de um Evento

Os três irmãos **Pedro**, **João** e **Luís** foram brincar na rua. Supondo-se que as condições de retorno para casa são as mesmas para cada um deles, qual é a probabilidade de **Luís** voltar para casa primeiro?

Como **3** é o número total de irmãos, então **Luís** tem **1** chance em **3** de voltar para casa primeiro, por isto a **probabilidade** de **Luís** voltar para casa antes dos seus irmãos é igual a $^1/_3$.

1.4.1. Definição

A **probabilidade de um evento ocorrer** (Luís voltar para casa primeiro) considerando-se um **espaço amostral**(Pedro, João e Luís) é igual a **razão** do **número de elementos do evento** (1, apenas Luís) para o **número de elementos do espaço amostral** (3, o número de irmãos que foram brincar na rua), desde que espaço o amostral seja um **conjunto equiprovável**, ou seja, todos os seus elementos tenham a mesma possibilidade de ocorrer (as condições de retorno para casa são as mesmas para os três irmãos).

Sendo **E** um evento, **n(E)** o seu número de elementos, **S** o espaço amostral não vazio e **n(S)** a quantidade de elementos do mesmo, temos que a probabilidade de **E** ocorrer é igual a:

$P(E) = \frac{n(B)}{n(s)}$, sendo **n(S)≠0.**

A probabilidade é um número entre zero e um, inclusive, o que significa que no mínimo não a nenhuma hipótese do evento acontecer e no máximo o evento sempre ocorrerá:

0 ≤ P(E) ≤ 1

Normalmente representamos probabilidades através de frações, mas também podemos representá-las por números decimais, ou até mesmo por porcentagens.

Exemplos

Um dado é lançado. Qual é a probabilidade de obtermos um número divisor de 6?
Como vimos acima, o **espaço amostral** do lançamento de um dado é:
S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Como estamos interessados apenas nos resultados **divisores** de **6**, o evento **E** é representado por:
E = { 1, 2, 3, 6 }
ou 66,6%
Então **n(E) = 4** e **n(S) = 6**, portanto:

$$P(E) = \frac{4}{6}$$

A probabilidade de se obter um número divisor de 6 é $^2/_3$ ou 66,67%.

Exemplo 2: **Uma moeda é lançada 4 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos ao menos uma coroa?**
Recorrendo ao **princípio fundamental da contagem** podemos calcular o número de elementos do espaço amostral deste exemplo:
n(S) = 2 . 2 . 2 . 2 = 16

Agora precisamos saber o número de elementos do evento **E**, referente a quatro lançamentos de uma moeda, quando obtemos ao menos uma **coroa**.

Lembra-se do **evento complementar** explicado acima? Sabendo quantos são os resultados que não apresentam nenhuma **coroa**, ele nos permite descobrir o número dos que possuem ao menos uma.

E quantos são os eventos que não possuem nenhuma coroa? Apenas o evento **E = { cara, cara, cara, cara }**, ou seja, apenas **1**. Como o número total de eventos é **16** e **1** deles não apresenta qualquer coroa, então os outros **15** apresentam ao menos uma. Então:

$$P(E) = \frac{15}{16}$$

A probabilidade de obtermos ao menos uma coroa é $^{15}/_{16}$, 0,9375 ou 93,75%.

2. Desmistificando o cálculo de probabilidades

Na página **sobre conceitos da probabilidade** a definimos como sendo a **razão** do número de elementos de um **evento** para o número de elementos do **espaço amostral**. O **espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer. No evento do lançamento de um dado, qual é a probabilidade de cair o número **5**?

Nós sabemos que um dado é um cubo que possui as suas faces numeradas de **1** a **6**. Em termos de probabilidades o seu espaço amostral é: **S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }**
Como um dado possui seis faces distintas, possuindo apenas uma face igual a **5**, a probabilidade de dar este valor é de **uma** em **seis**, que podemos representá-la assim:

$P(E) = \frac{1}{6}$

Note que não há segredo, como dito acima, a probabilidade de um evento ocorrer nada mais é que **a razão do seu número de elementos para o número de elementos do espaço amostral**.

.

Exemplos

Um jovem casal pretende ter 3 filhos. Qual é a probabilidade de que tenham pelo menos uma menina?

Quantas são as combinações possíveis, ou em outras palavras, qual é o número de elementos do espaço amostral?

Para cada filho temos duas possibilidades, ou é masculino ou é feminino, então pelo **princípio fundamental da contagem** temos que **2 . 2 . 2 = 8**, portanto há **8** agrupamentos possíveis. Dos **8** agrupamentos possíveis um deles é formado apenas por meninos, todos os outros **7** possuem ao menos uma menina, portanto a probabilidade de que o casal tenha pelo menos uma menina é a razão de **7** para **8**:

$P(E) = \frac{7}{8}$

Se representarmos por **M** os filhos do sexo masculino e por **F** os filhos do sexo feminino, podemos representar assim o espaço amostral:

S = { (F, F, F), (F, F, M), (F, M, F), (F, M, M), (M, F, F), (M, F, M), (M, M, F), (M, M, M) }

Confirmando o que foi dito acima, apenas o último elemento não possui meninas, então **7** dos **8** eventos possíveis satisfazem à condição do enunciado, confirmando também a probabilidade calculada acima.

A probabilidade de que tenham pelo menos uma menina é $^7/_8$.

Qual é a probabilidade do jovem casal vir a ter tanto meninos quanto meninas?

Analisando o espaço amostral deduzimos que o evento **E = { (F, F, M), (F, M, F), (F, M, M), (M, F, F), (M, F, M), (M, M, F) }** satisfaz as condições do enunciado, pois seus elementos possuem tanto meninos quanto meninas. Como este evento possui **6** elementos, que representamos por **n(E) = 6**, então a probabilidade será:

$P(E) = \frac{6}{8}$

A probabilidade de venham a ter tanto meninos quanto meninas é $^3/_4$.

Qual é a probabilidade de que venham a ter mais meninas que meninos?

A partir do espaço amostral vemos que o evento **E = { (F, F, F), (F, F, M), (F, M, F), (M, F, F) }** satisfaz a condição desejada. Visto que este evento possui **4** elementos, temos que a probabilidade será:

$P(E) = \frac{4}{8}$

A probabilidade de venham a ter mais meninas que meninos é $^1/_2$.

No lançamento de um dados qual é a probabilidade de obtermos um 3 ou um 5?

No início deste tópico vimos que a probabilidade de ocorrer um **5** no lançamento de um dado é $^1/_6$. Assim como acontece com o **5**, também só há um **3** no dado, então a probabilidade de ocorrer um **3** também é $^1/_6$. Como a ocorrência de um **3** inibe a ocorrência de um **5** e vice-versa, pois em um único lançamento se acontecer um, não pode acontecer o outro, dizemos que eles são eventos mutuamente exclusivos.

Quando utilizamos a conjunção **"OU"**, neste exemplo desejamos obter **3 ou 5**, estamos tratando da união de probabilidades. Quando, assim como neste exemplo, os eventos são mutuamente exclusivos, devemos somar as probabilidades individuais. Então temos que $^1/_6 + ^1/_6 = ^1/_3$, que é a probabilidade procurada.

Se os eventos não fossem mutuamente exclusivos, a soma ainda valeria, mas precisaríamos subtrair deste total a probabilidade da ocorrência dos elementos na intersecção destes eventos. Isto é estudado em maiores detalhes na página sobre **união de dois eventos**.

A probabilidade de obtermos um 3 ou um 5 é $^1/_3$.

Em lançamentos sucessivos de um dado qual é a probabilidade de obtermos um 3 e depois um 5?

Repare que agora estamos utilizando a conjunção **"E"**. Quando temos a ocorrência de vários eventos independentes e sucessivos, estamos tratando do produto de probabilidades. A probabilidade de que os eventos ocorram nesta ordem é obtida através do produto das probabilidades individuais.
Neste exemplo temos que $^1/_6 \,.\, ^1/_6 = ^1/_{36}$.

A probabilidade de obtermos um 3 e depois um 5 é $^1/_{36}$.

3. Probabilidade condicional

Quando discorremos sobre **alguns conceitos da probabilidade** e também sobre a **união de dois eventos**, os exemplos dados sempre calculavam a probabilidade de um evento ocorrer diretamente em função do espaço amostral. A **probabilidade condicional** trata da probabilidade de ocorrer um evento **A**, tendo ocorrido um evento **B**, ambos do espaço amostral **S**, ou seja, ela é calculada sobre o evento **B** e não em função o espaço amostral **S**.
A probabilidade de ocorrência de um evento **A** em relação a um evento ocorrido **B** é expressa como:

$$P(B) = \left(\frac{A}{B}\right)$$

Para calculá-la podemos nos utilizar da fórmula:

$$P = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sabemos que P(A∩B), a probabilidade da intersecção, é a razão do seu número de elementos, para o número de elementos do espaço amostral:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(s)}$$

A probabilidade de **B** também é a razão do seu número de elementos, para o número de elementos do espaço amostral:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)}$$

Os substituindo na fórmula original temos:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{n(s)}}{\frac{n(B)}{n(s)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Exemplo

Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira MasterCard, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de ao escolhermos deste grupo uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?

O número de pessoas que utilizam as duas bandeiras, ou seja, a quantidade de elementos da intersecção é igual a **200**, já o número de consumidores que utilizam ao menos a bandeira **VISA** é **550**, portanto:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{200}{550} = \frac{4}{11}$$

Portanto:

A probabilidade de escolhida uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um usuário da bandeira MASTERCARD é $^{4}/_{11}$.

Acima tratamos da probabilidade da ocorrência de um evento **A** tendo ocorrido um evento **B**. Se tivéssemos a probabilidade da ocorrência de um evento **B** tendo ocorrido um evento **A**, a fórmula para o cálculo desta probabilidade seria:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

4. União de dois eventos

O tema é o cálculo da probabilidade da união de dois eventos contidos em um mesmo espaço amostral.

Para um melhor entendimento da matéria, a mesma será explicada através de dois exemplos. No primeiro exemplo a intersecção entre os eventos é vazia, no segundo não.

Exemplos A: Ao lançarmos um dado, qual é a probabilidade de obtermos um número menor que 3 ou maior que 4?

Como sabemos, neste exemplo o **espaço amostral** é composto de seis elementos:
S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Chamemos de **A** o evento que representa a ocorrência de um menor que **3**:
A = { 1, 2 }
Vamos chamar de **B** o evento que representa a ocorrência de um número maior que **4**:
B = { 5, 6 }
Como o número de elementos de **S** é **6**, temos que **n(S) = 6**.
Para **A** temos **n(A) = 2** e para **B** temos também **n(B) = 2**.
Podemos então calcular a probabilidade de **A**:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

E também a probabilidade de **B**:
$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

A probabilidade procurada pode ser obtida simplesmente somando **P(A)** com **P(B)** como na fórmula abaixo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Então temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \qquad P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Portanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

A probabilidade de obtermos um número menor que 3 ou maior que 4 é igual a $^2/_3$.

B) Ao lançarmos um dado, qual é a probabilidade de obtermos um número primo ou um número ímpar?

Assim como no exemplo anterior, neste exemplo o **espaço amostral** também é:
S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Vamos chamar de **A** o evento que representa a ocorrência de um **número primo**:
A = { 2, 3, 5 }
Chamemos de **B** o evento que representa a ocorrência de um número ímpar:
B = { 1, 3, 5 }
Como o número de elementos de **S** é **6**, temos que **n(S) = 6**.
Para **A** temos **n(A) = 3** e para **B** temos **n(B) = 3**.
Podemos então calcular a probabilidade de **A**:$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} \rightarrow P(A) = \frac{3}{6} \rightarrow \frac{1}{2}$
E também a probabilidade de **B**:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} \rightarrow P(B) = \frac{3}{6} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Se simplesmente somarmos as probabilidades **P(A)** e **P(B)** como no exemplo anterior, a probabilidade da união será igual **1**, que facilmente podemos constatar não se tratar de um valor correto, pois isto significa uma probabilidade de **100%**, mas o espaço amostral também possui os números **4** e **6**, que não são **primos** e muito menos **ímpares**. Agora observe que **3** e **5** pertencem tanto a **A** quanto a **B**, ou seja:A∩B={3,5}

Como **3** e **5** estão na intersecção de **A** com **B**, eles estão sendo considerados tanto em **P(A)**, quanto em **P(B)**, por isto se simplesmente somarmos **P(A) + P(B)**, os estaremos considerando em dobro, por este motivo devemos subtrair p(A∩B) , para que eles sejam considerados uma única vez. Podemos então escrever a seguinte fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \mathrm{P(A{\cap}B)}$$

Para podermos utilizar esta fórmula, precisamos calcular a probabilidade de :

$$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{n(s)} = P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Finalmente temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

A probabilidade de obtermos um número primo ou um número ímpar ao lançarmos um dado é igual a $^2/_3$.

Exercícios

1) Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola ser verde? R: 5/12
2) Três moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de as três moedas caírem com a mesma face para cima? R: ¼ ou 25%
3) Um casal pretende ter filhos. Sabe-se que a cada mês a probabilidade da mulher engravidar é de 20%. Qual é a probabilidade dela vir a engravidar somente no quarto mês de tentativas? R: 10,24%
4) Um credor está à sua procura. A probabilidade dele encontrá-lo em casa é 0,4. Se ele fizer 5 tentativas, qual a probabilidade do credor lhe encontrar uma vez em casa? R: 0,2592
5) Em uma caixa há 2 fichas amarelas, 5 fichas azuis e 7 fichas verdes. Se retirarmos uma única ficha, qual a probabilidade dela ser verde ou amarela? R:9/14
6) Alguns amigos estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas. Em uma delas há 3 pastéis e 5 coxinhas. Na outra há 2 coxinhas e 4 pastéis. Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual a probabilidade de se ter pegado um pastel?R:25/48
7) O jogo de dominó é composto de peças retangulares formadas pela junção de dois quadrados. Em cada quadrado há a indicação de um número, representado por uma certa quantidade de bolinhas, que variam de nenhuma a seis. O número total de combinações possíveis é de 28 peças. Se pegarmos uma peça qualquer, qual a probabilidade dela possuir ao menos um 3 ou 4 na sua face? R:13/28
8) Em uma caixa há 4 bolas verdes, 4 azuis, 4 vermelhas e 4 brancas. Se tirarmos sem reposição 4 bolas desta caixa, uma a uma, qual a probabilidade de tirarmos nesta ordem bolas nas cores verde, azul, vermelha e branca? R:8/1365
9) Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol? R:2/5
10) De uma sacola contendo 15 bolas numeradas de 1 a 15 retira-se uma bola. Qual é a probabilidade desta bola ser divisível por 3 ou divisível por 4? R:7/15